«Μια Γεωμετρική εφαρμογή Μεγίστου κι Ελάχιστου με χρόνο, μέσω Δυναμικού Λογισμικού, ως Διδακτική Πρόταση»

Πλατάρος Γιάννης

Μαθηματικός 1[ου] ΓΕΛ Μεσσήνης
plataros@gmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Μία από τις δυνατότητες που παρέχουν τα δυναμικά γεωμετρικά λογισμικά, είναι η δυνατότητα μελέτης μεταβολών γεωμετρικών μεγεθών σε συνάρτηση με τον χρόνο, μέσω αντιστοίχου γραφικής παραστάσεως. Επί πλέον ο δυναμικός χειρισμός του σχήματος σε προβλήματα μεγίστου και ελαχίστου, βοηθά αποφασιστικά τον μαθητή στον σχηματισμό της ορθής τελικά εικασίας και μάλιστα της εικασίας που έχει να κάνει με την ίδια την διατύπωση –ανακάλυψη της πρότασης. Επίσης η χρήση του δυναμικού εργαλείου, μπορεί να μυήσει ουσιαστικά τον μαθητή στην απειροστική σκέψη, καθώς το ίδιο το λογισμικό που θέτει την κίνηση στα σχήματα ή παρακολουθεί τις μεταβολές τους αποτελεί γέφυρα μεταξύ Ανάλυσης και Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: *μέγιστο, ελάχιστο, εμβαδόν, περίμετρος, δυναμικό γεωμετρικό λογισμικό.*

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Τις τελευταίες δεκαετίες έχουν αναπτυχθεί υπολογιστικά συστήματα τα οποία δημιουργούν περιβάλλοντα μάθησης γεωμετρίας του χώρου [7] . Σε περιβάλλοντα συνδυασμένης μάθησης (blended learning) οι μαθητές συνδυάζουν την παραδοσιακή διαδικασία μάθησης που παρέχεται από τον εκπαιδευτικό με πρακτικές χρήσης πληροφοριών από υπολογιστικά συστήματα [4].

Είναι γεγονός, ότι το Δυναμικό λογισμικό Γεωμετρίας, μπορεί να θεωρηθεί, ως η πλέον σημαντική εξέλιξη στην Γεωμετρία από την εποχή του Ευκλείδη. Έχει αναθερμάνει το ενδιαφέρον για μια βασική έρευνα , ενώ ανέστειλε τον κίνδυνο να υποβαθμιστεί η διδασκαλία της στην Δευτεροβάθμια εκπαίδευση. [2], [6]

Το πιο σπουδαίο από παιδαγωγικής απόψεως πλεονέκτημα του δυναμικού γεωμετρικού λογισμικού, είναι η δυνατότητά του να ενθαρρύνει τον πειραματισμό και την ερευνητική προσέγγιση στην μελέτη της Γεωμετρίας. Σε μια διδακτική προσέγγιση τέτοιου τύπου, οι μαθητές εξοικειώνονται στην τέχνη της μαθηματικής δημιουργίας και ανακάλυψης, αφού προσφέρονται άφθονες

ευκαιρίες για εξερεύνηση, διατύπωση εικασιών, ανασκευής και επαναδιατύπωσής τους, όπως και τελικού ελέγχου με την κατασκευή αποδείξεων [11]
Σε αυτή την εργασία χρησιμοποιήθηκε το δυναμικό λογισμικό Geometer's Sketchpad λόγω της δυνατότητας του να παράγει γεωμετρικά σχέδια με την εισαγωγή πληροφοριών του χρήστη, ο οποίος μπορεί να τα μετασχηματίζει κινώντας ένα στοιχείο του σχήματος [1] ώστε να αντιμετωπισθεί ένα πρόβλημα μεγίστου /ελαχίστου.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Έχει δοκιμασθεί ένα συγκεκριμένο πρόβλημα μεγίστου και ελαχίστου σε μαθητές της Β΄ Λυκείου του 1ου ΓΕΛ Μεσσήνης, , όπως και σε επιμορφούμενους καθηγητές Β΄ επιπέδου σε διαφορετικούς χρόνους. Η διαπραγμάτευση έγινε με το δυναμικό εκπαιδευτικό λογισμικό Sketchpad και ιδιαίτερη προσοχή δόθηκε στο πώς θα διατυπωθούν οι εικασίες για την λύση του, μέχρι να ανακαλυφθεί η σωστή που θα οδηγήσει και στην λύση.

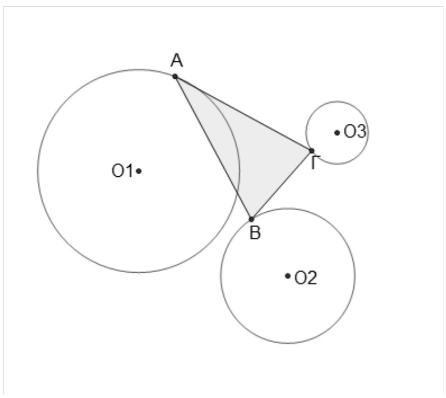
ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ-ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ

Αντιμετωπίζουμε το εξής πρόβλημα: *«Τρία σημεία Α, Β, Γ, κινούνται επί τριών κύκλων. Να εξεταστεί αν και πότε υπάρχει περιοδικότητα στην κίνηση του τριγώνου ΑΒΓ , όπως και ποίες είναι οι θέσεις των τριών σημείων, για να έχουμε μέγιστο και ελάχιστο εμβαδόν ή περίμετρο»* Η διατύπωση, που δεν είναι κλειστού τύπου, επάγει σε ένα ανοικτό πρόβλημα, του οποίου η όλη διερεύνηση καθίσταται ιδανική με ένα δυναμικό Γεωμετρικό λογισμικό (το Sketchpad εδώ) μέσω ανακαλυπτικών διαδικασιών μάθησης .

ΔΙΑΠΡΑΓΜΑΤΕΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Η ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΤΗΤΑ:

Η περιοδικότητα ήταν ένα σκέλος του προβλήματος για το οποίο δεν διαπιστώθηκαν ιδιαίτερες δυσκολίες στην επίλυση. Σημειωτέα μόνο η παρατήρηση ότι όλοι πρόσεξαν ότι μοιάζει με πρόβλημα Φυσικής παρά Γεωμετρίας. Πράγματι, περιοδικότητα έχουμε, όταν ξεκινώντας από οποιοδήποτε τυχαίο στιγμιότυπο-θέση, επανερχόμαστε στο ίδιο, σε κάποιο χρόνο t .

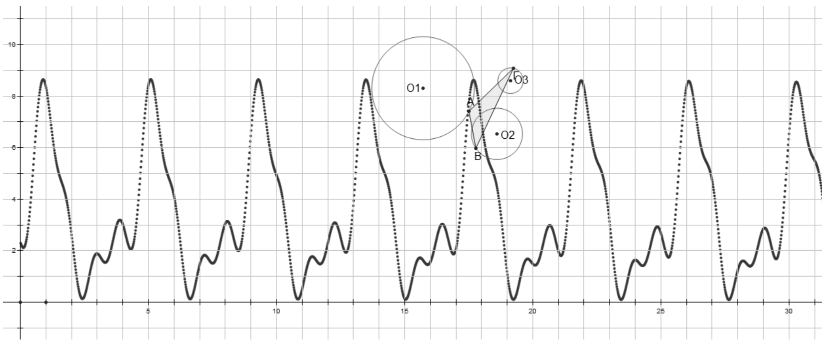


Σχήμα 1

Τότε τα Α,Β,Γ θα έχουν διαγράψει ακέραιο αριθμό περιστροφών κ, λ, μ, αντιστοίχως και θα ισχύει:

$$\upsilon t = \kappa \cdot 2\pi\rho_1 = \lambda \cdot 2\pi\rho_2 = \mu \cdot 2\pi\rho_3$$

όπου ρ_1,ρ_2,ρ_3, οι ακτίνες των κύκλων με κέντρα O_1,O_2,O_3, αντιστοίχως, απ΄ όπου έχομε: $\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{\kappa}{\lambda}\ \kappa\alpha\iota\ \frac{\rho_3}{\rho_2}=\frac{\lambda}{\mu}$ δηλ. οι λόγοι των ακτίνων είναι ρητοί, που είναι τελικά μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχω περιοδικότητα. Για την πρώτη φορά επανόδου, δηλ. για τον χρόνο περιόδου Τ, απαιτείται να ισχύει και η συνθήκη (κ,λ,μ)=1. Σε περίπτωση άρρητης σχέσης των ακτίνων, δεν μπορώ να έχω περιοδικότητα. Το σημαντικό λοιπόν είναι, ότι αν εκκινήσουμε από μια θέση, ανεξαρτήτως χρόνου και ταχύτητας, δεν είναι βέβαιο ότι η θέση αυτή θα επαναληφθεί. Στους καθηγητές επί πλέον επισημάναμε, ότι αν θέσουμε το ερώτημα πιθανοθεωρητικά ως «ποία η πιθανότητα εκκινώντας από τρεις τυχαίες ακτίνες να έχω περιοδικό φαινόμενο» θα φθάσουμε στο λίαν ενδιαφέρον συμπέρασμα ότι αυτή είναι 0, δεδομένου ότι το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ έχει μέτρο 0, ενώ το $\mathbb{R}$ έχει άπειρο μέτρο. Δηλ. αν θεωρήσουμε την αντίστοιχη γεωμετρική πιθανότητα, τότε: $p(\pi\varepsilon\rho\iota o\delta\iota\kappa o\acute{\upsilon}\,\varphi\alpha\iota\nu o\mu\acute{\varepsilon}\nu o\upsilon)=\frac{\mu(\mathbb{Q})}{\mu(\mathbb{R})}=0$. Αυτό το συμπέρασμα, επάγει την υπόθεση ότι και οι πιο περίπλοκες κινήσεις πλανητών, αστέρων κτλ δεν είναι ποτέ δυνατόν να είναι απολύτως περιοδικές, πέραν του ότι δεν υπάρχουν σταθερές γραμμικές ταχύτητες και κυκλικές τροχιές. Με την λογική των ρητών προσεγγίσεων, μπορούμε να σκεφθούμε, ότι όλες οι ουράνιες κινήσεις, είναι «περίπου περιοδικά» φαινόμενα και δεν είναι δυνατόν να είναι περιοδικά (ή είναι εξαιρετικά απίθανο να είναι!) Τα «ακριβώς περιοδικά» φαινόμενα φαίνεται να προκύπτουν από επί τούτω κατασκευαστική λογική τροχών με γρανάζια, όπου εκεί εξ ορισμού η σχέση είναι ρητή και η κίνηση περιοδική. (Μηχανισμοί ωρολογίων κτλ)



Σχήμα 2

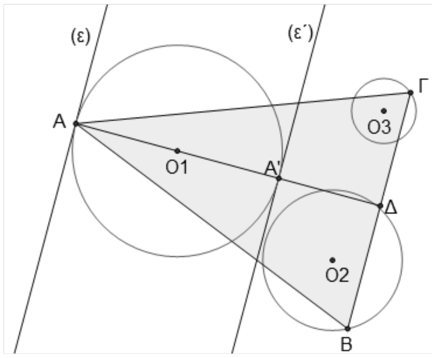
ΜΕΓΙΣΤΟ –ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΕΜΒΑΔΟΝ:

Όταν δεν γνωρίζουμε την θέση μεγίστου και ελαχίστου, μπορούμε να κάνουμε μόνο εικασία και στην συνέχεια να προσπαθήσουμε να το αποδείξουμε. Η συνήθης εικασία που μπορεί να κάνει κάποιος σε αυτό, είναι να μεγιστοποιήσει την βάση και το ύψος του τριγώνου. Μια μέγιστη βάση είναι στην διεύθυνση της διακέντρου δύο κύκλων σε λογική αντιδιαμετρικών σημείων και σε μεγιστοποίηση του αντιστοίχου ύψους. Στη δοκιμαστική διδασκαλία του συγκεκριμένου σκέλους του προβλήματος στην Β΄ Λυκείου, αλλά και στην διαπραγμάτευση του ερωτήματος μεταξύ συναδέλφων μαθηματικών, αυτή η

εικασία ήταν η πλέον ευλογοφανής για όλους. Υπάρχουν τρεις τέτοιες θέσεις οι οποίες δεν δίνουν λύση, αφού απλώς αυτή η φαινομενικά εύλογη και παγκοίνως αποδεκτή πρώτη εικασία, απλώς δεν ισχύει. Το μόνο που μπορεί να πάθει κάποιος, είναι να προσπαθεί ανεπιτυχώς να αποδείξει κάτι που δεν αποδεικνύεται. Το λογισμικό αποτρέπει αυτή την λανθασμένη εικασία. Η λύση, τελικά δεν προέκυψε μέσα στην τάξη, αφού όντως πρόκειται για δύσκολο πρόβλημα. Ακόμα και για τους συναδέλφους η λύση προκύπτει σε διαπραγμάτευση στο σπίτι. Γενικά, η κλειστότητα των μαθηματικών διατυπώσεων των Γεωμετρικών προβλημάτων που παραδοσιακά ισχύει, αποτρέπει παντελώς τον λύτη από λανθασμένες εικασίες διατύπωσης. Τέτοιες, διαπράττει συνηθέστατα αυτός που ανακαλύπτει το πρόβλημα, λίγο πριν φθάσει στην λύση του. Με αυτό τον τρόπο, ο ερευνητής μαθηματικός, αυτός που ανακαλύπτει την νέα γνώση, δεν μοιάζει καθόλου με τον μαθητή που αντιμετωπίζει το ίδιο πρόβλημα. Για χιλιετηρίδες, αφαιρείται από τον μαθητή η δυνατότητα λανθασμένης εικασίας κατά την διατύπωση του προβλήματος και αυτή του την επιτρέπει μόνο κατά την απόδειξη. Αυτό έρχεται σε μια οιονεί σύγκρουση με το πνεύμα και την ουσία των νέων εποικοδομητικών θεωριών που επιμένουν στο ότι η μάθηση των μαθηματικών, είναι ενεργητική και κατασκευαστική διαδικασία, που είναι ιδιαίτερη για κάθε μαθητή. [3], [6]. Βεβαίως, δεν είναι δυνατόν όλα τα προβλήματα να έχουν πάντα ανοικτή διατύπωση, διότι υπάρχει το πεπερασμένο και περιορισμένο του χρόνου διδασκαλίας. Το άνοιγμα στην διατύπωση (στην υπόθεση είτε στο συμπέρασμα) μετατρέπει μια άσκηση σε πρόβλημα. Με μια τέτοια έννοια, τα εγχειρίδια Ευκλείδειας Γεωμετρίας ουσιαστικά προέτειναν για επίλυση προτάσεις με κλειστή υπόθεση και κλειστό συμπέρασμα, δηλ. ασκήσεις και όχι προβλήματα. Επομένως, με τις νέες αντιλήψεις, αφού η εικασία στην διατύπωση έχει την θέση της στην κατασκευή της γνώσης , αυτομάτως έχουν θέση και τα δυναμικά υπερεργαλεία Γεωμετρίας (Sketchpad, Cabri, EuclidDraw, Geogebra) τα οποία μπορούν να διαπραγματευτούν παρόμοια και όχι μόνον θέματα, επιτυχέστατα. Στην συγκεκριμένη περίπτωση, σταθεροποιώντας σε τυχαίες θέσεις δύο κορυφές και μεταβάλλοντας την μία κορυφή επί του κύκλο, βρίσκουμε μια θέση μεγίστου εμβαδού. Εν συνεχεία μεταβάλλοντας την άλλη κορυφή με σταθεροποιημένες τις άλλες δύο, ομοίως και την τρίτη κορυφή, έχουμε την θέση μεγίστου εμβαδού. Το σχηματισθέν τρίγωνο μέγιστου εμβαδού, έχει ύψη που διέρχονται από τα κέντρα των κύκλων. Αυτό πρέπει να το εικάσει ο λύτης, να το επαληθεύσει και βεβαίως να το αποδείξει.

Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

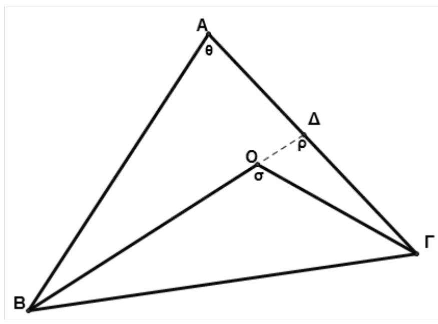
Η πειραματική εύρεση- επαλήθευση της θέσης μεγίστου, ναι μεν χαρακτηρίζεται ως «ισχυρότατη εικασία,» αλλά πάντα είναι εικασία ενώ η αναγκαιότητα της απόδειξης αυτονόητη. Για την απόδειξη, η ίδια η εμπλοκή στην πειραματική εύρεση, μπορεί να περιορίσει και τις λανθασμένες εικασίες για την ίδια την απόδειξη και να οδηγήσει σε ένα ορθό δρόμο γι αυτήν. Ξεκινάμε αντίστροφα από την πειραματική πορεία μεγιστοποίησης. Θεωρούμε μια τυχαία θέση των Α.Β,Γ και μετακινούμε μόνο λ.χ. το Α στην θέση μεγιστοποίησης που είναι αυτή για την οποία η ΑΟ$_1$ είναι ύψος στην πλευρά ΒΓ. Αυτό φαίνεται στο σχήμα 3, όπου εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε, ότι το Α δίνει το μέγιστο εμβαδόν για οποιαδήποτε μεταβολή του Α επί του κύκλου Ο$_1$. Ταυτοχρόνως, προκύπτει και η αντιδιαμετρική θέση Α΄ η οποία δίνει μια υποψία για την θέση του ελαχίστου, το οποίο είναι σε θέση για την οποία τα ΑΟ$_1$, ΒΟ$_2$,ΓΟ$_3$, είναι στους φορείς των υψών, χωρίς τα Ο$_1$, Ο$_2$,Ο$_3$,να εμπεριέχονται στις ημιευθείες των υψών και χωρίς αυτοί οι φορείς να συμπίπτουν με τους φορείς των υψών για την θέση του μεγίστου. (Οι ευθείες (ε) και (ε΄) για τις οποίες ισχύει (ε)//(ε΄) //ΒΓ οριοθετούν με την οριζόμενη λωρίδα τους, το μέγιστο και ελάχιστο ύψος για το τρίγωνο με σταθερή βάση ΒΓ) Ομοίως, οι αντίστοιχες θέσεις για τα Β και Γ οριοθετούν μέγιστο και ελάχιστον εμβαδόν για κάθε θέση των Β και Γ επί κάθε κύκλου , απ΄ όπου παίρνουμε τελικά και την απόδειξη για την μεγιστοποιούσα θέση του εμβαδού.



Σχήμα 3

ΜΕΓΙΣΤΗ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΣ :

Με ακριβώς ανάλογη εργασία με τα προηγούμενα, καταλήγουμε στο ότι οι θέσεις μεγίστης και ελαχίστης περιμέτρου, προκύπτουν όταν οι ΑΟ$_1$, ΒΟ$_2$, ΓΟ$_3$ είναι διχοτόμοι των γωνιών των δύο οριζομένων τριγώνων ΑΒΓ. (σχήμα 5) Για την απόδειξη, εφαρμόζουμε την ίδια συλλογιστική με την προηγούμενη περίπτωση. Ξεκινούμε από μια τυχαία θέση ΗΒΓ και θα δείξουμε, ότι καθώς μεταβάλλεται μόνο το Η επί του Ο$_1$, η μεγιστοποιούσα την περίμετρο θέση είναι η ΑΒΓ, όταν δηλαδή Η□Α και ΑΟ$_1$, είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ.

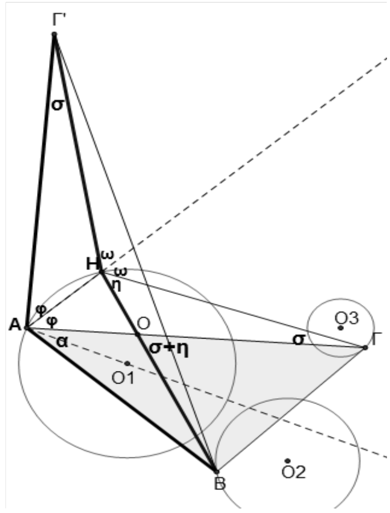


Σχήμα 4

Η απόδειξη θα βασιστεί σε μια γνωστή βοηθητική πρόταση που λέει, ότι αν σε τρίγωνο ΑΒΓ, (σχήμα 4) λάβω εντός του τριγώνου τυχαίο σημείο Ο, τότε

ΑΒ+ΑΓ>ΟΒ+ΟΓ . Από τριγωνική ανισότητα στο τρ.ΑΒΔ, έχω ΑΒ+ΑΔ>ΒΟ+ΟΔ (1) και επίσης από τριγωνική ανισότητα στο τρ. ΔΟΓ έχω ότι ΟΓ>ΔΓ-ΟΔ (2) Με πρόσθεση των (1) και (2) κατά μέλη λαμβάνω το ζητούμενο. Επίσης, ισχύει $\hat{\rho} > \hat{\theta}$ λόγω του ότι ρ εξωτερική και θ εσωτερική γωνία στο τρ. ΑΒΔ και επίσης $\hat{\sigma} > \hat{\rho}$ για τον ίδιο λόγο στο τρίγωνο ΟΔΓ, απ᾽ όπου τελικά έχομε $\hat{\theta} < \hat{\sigma}$, που είναι μια αναγκαία μια αναγκαία συνθήκη για κάθε εσωτερικό σημείο Ο του τρ. ΑΒΓ. Στο σχήμα 5, θα δείξω, ότι περ(ΗΒΓ)<περ(ΑΒΓ).

Πρέπει ισοδυνάμως να δείξω, ότι ΗΒ+ΗΓ<ΑΒ+ΑΓ. Φέρω την ΑΗ και βρίσκω τα συμμετρικά ΗΓ᾽ του ΗΓ ως προς ΑΗ, όπως και το ΑΓ᾽ του ΑΓ ως προς ΑΗ. Από την προρρηθείσα βοηθητική πρόταση, στο τρίγωνο ΑΒΓ᾽ αυτό ισχύει. Όμως, αυτό ισχύει για όλα τα σημεία του ελάσσονος τόξου του κύκλου O_1 που ορίζεται από την ΑΓ. Γι αυτά ισχύει $2\hat{\varphi} + \hat{\alpha} < 2\hat{\omega} + \hat{\eta}$. (3) Πράγματι, στο τρίγωνο ΑΗΓ᾽ ισχύει, $\hat{\omega} = \hat{\varphi} + \hat{\sigma}$ από όπου με αντικατάσταση στην (3) έχω $2\cancel{\hat{\varphi}} + \hat{\alpha} < 2\cancel{\hat{\varphi}} + 2\hat{\sigma} + \hat{\eta} \Leftrightarrow \hat{\alpha} < 2\hat{\sigma} + \hat{\eta}$.(4) Όμως, από το τρίγωνο ΗΟΓ, ισχύει $\widehat{BO\Gamma} = \hat{\eta} + \hat{\sigma}$. Αυτή είναι εξωτερική γωνία στο τρ. ΑΟΒ, άρα $\hat{\alpha} < \hat{\eta} + \hat{\sigma} \Rightarrow \hat{\alpha} < \hat{\eta} + 2\hat{\sigma}$ που είναι η (4) η αποδεικτέα. Λόγω συμμετρίας, τα ίδια ισχύουν και για τα σημεία του ελάσσονος τόξου που ορίζεται από την ΑΒ, ενώ για τα σημεία του τόξου στο οποίο βαίνει η $\hat{\alpha}$, η απόδειξη συνίσταται σε απλή εφαρμογή της βοηθητικής πρότασης. Η απόδειξη ολοκληρώνεται με ανάλογη συλλογιστική και για τους άλλους κύκλους και τελικά προκύπτει η μεγιστοποιούσα την περίμετρο θέση, όπως και η θέση ελαχιστοποίησης με όμοια διαδικασία.



Σχήμα 5

Σε μια τέτοια απόδειξη, η γνωστή από το λογισμικό μεγιστοποιούσα θέση, διευκολύνει σε μεγάλο βαθμό την ίδια την απόδειξη. Αν επιχειρήσει κάποιος να προσεγγίσει το θέμα αυτό χωρίς το δυναμικό λογισμικό και χωρίς αναλυτική Γεωμετρία (όπου θα χρειαστεί να βρει ακρότατα συνάρτησης μάλλον με μη λυκειακά μαθηματικά) θα συναντήσει πιθανόν αρκετή δυσκολία. Είναι υποχρεωμένος να σκεφθεί, ότι αν υπάρχει μια τέτοια θέση για το Α, τότε εκατέρωθεν του Α και οσοδήποτε κοντά στο Α, θα πρέπει να ισχύει μια σχέση όπως η (3) για τα όπως φαίνεται στο σχήμα 5 σημεία δεξιά του Α, ενώ για τα αριστερά, μια ανάλογη σχέση με τις γωνίες , δηλ. $2\hat{\varphi} + \hat{\alpha} \le 2\hat{\omega} + \hat{\eta}$ (3᾽) που εμπεριέχει την περίπτωση Α≡Η για το ίσον. Όπως και $180^0\text{-}(2\hat{\varphi} + \hat{\alpha}) \le 180^0\text{-}(2\hat{\omega}' + \hat{\eta}') \Leftrightarrow 2\hat{\varphi} + \hat{\alpha} \ge 2\hat{\omega}' + \hat{\eta}'(4)$ Σκεπτόμενοι απειροστικά, αν υπάρχει φ : να ισχύουν οι (3᾽) και (4) για κάθε α, καθώς η□α και η᾽□α, όπως και ω□φ και ω᾽□φ. Προφανώς η τιμή είναι αυτή της μέγιστης κυρτής

γωνίας, δηλ. $2\hat{\varphi}+\hat{\alpha}=180^0 \Leftrightarrow \hat{\varphi}+\frac{\hat{\alpha}}{2}=90^0$ και επειδή έχουν θέση εφεξής γωνιών, η ΑΗ είναι η οριακή θέση της εφαπτόμενης στο Α και AO_1 η διχοτόμος της $\hat{A}$. Αυτή η προσέγγιση έγινε μόνο από έναν-δυό καθηγητές. Βεβαίως, στο προηγούμενο μπορεί να φθάσει κάποιος σκεπτόμενος και κλασικά γεωμετρικά , παρατηρώντας, ότι εκατέρωθεν του Α και κοντά στο Α , σχηματίζεται μικρότερη και μεγαλύτερη γωνία στο Η , δηλ. $\widehat{BH\Gamma'} \leq \widehat{BA\Gamma'} \leq \widehat{BH\Gamma'}$. Για να αρθεί αυτό, θα πρέπει η $\widehat{BA\Gamma'}$ να γίνει ευθεία , οπότε, εκατέρωθεν του Α να έχω μόνο μεγαλύτερες γωνίες.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ –ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

Το πρόβλημα έχει μη τετριμμένη κατασκευή που το ολοκληρώνει, όπως και διερεύνηση, που μπορεί να γίνει πολύ καλύτερα για κάθε Γεωμετρικό πρόβλημα που την απαιτεί, μέσω του δυναμικού λογισμικού. Για παράδειγμα, όταν οι κύκλοι είναι ομόκεντροι έχω άπειρες λύσεις (θέσεις) με το ίδια μέγιστη περίμετρο, οι οποίες προκύπτουν από την περιστροφή μιας λύσης γύρω από το κοινό κέντρο. Όταν έχω δύο ομόκεντρους κύκλους, έχω δύο λύσεις με την ίδια περίμετρο, που προκύπτουν από τα συμμετρικά των δύο κορυφών μιας λύσης ως προς άξονα την διχοτόμο που δεν διέρχεται από το κοινό κέντρο. Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για το εμβαδόν.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Με την βοήθεια των δυναμικών Γεωμετρικών λογισμικών, το μάθημα της Γεωμετρίας, μπορεί να διδαχθεί ριζικά διαφορετικά και νύξεις περί αυτού, ήδη παραθέσαμε στα προηγούμενα. Συγκεκριμένα:

- Η γνώση, μπορεί να ανακαλυφθεί από τον μαθητή , καθώς το πνεύμα και ο χαρακτήρας σχεδίασης των δυναμικών λογισμικών, είναι προσαρμοσμένα πλήρως στην κοντρουκτιβιστική προσέγγιση της διδασκαλίας. Εδώ αντιμετωπίζουμε ένα ανοικτό πρόβλημα , ανακαλύπτουμε την διατύπωσή του και μετά το λύνουμε, κάτι που σπανιότατα γίνεται στην παραδοσιακή διδασκαλία. Αυτό ήταν έναυσμα γόνιμης συζήτησης με τους καθηγητές για την ποιοτικά διαφορετική προσέγγιση που κάνει το δυναμικό λογισμικό στην ίδια την Γεωμετρία.
- Εκτός από τις εντυπωσιακές δυνατότητες των δυναμικών γεωμετρικών λογισμικών στα προβλήματα γεωμετρικών τόπων, αυτά διαθέτουν και δυνατότητα διερεύνησης προβλημάτων μεγίστου και ελαχίστου. Το συγκεκριμένο πρόβλημα που αντιμετωπίσαμε, δεν είναι από τα πιο εύκολα (λ.χ. κανείς μαθητής δεν μπόρεσε να σκεφθεί να βρει το συμμετρικό τμήματος στην απόδειξη) όμως η βοήθεια του λογισμικού , τελικά δεν περιορίζεται στην εύρεση της ορθής εικασίας για την διατύπωση, αλλά ουσιαστικά βοηθά και στην απόδειξη, έπειτα βεβαίως και από σοβαρές ευρετικές νύξεις. Είναι γνωστό, πως παρόμοια

προβλήματα με ακρότατα σε περιμέτρους ευθυγράμμων σχημάτων διαπραγματεύονται με την τεχνική της «ευθειοποίησης» και στην συγκεκριμένη τάξη δεν είχε λυθεί κάποιο παρόμοιο θέμα ποτέ.

- Αναγκαστικά, καθώς υπάρχει κίνηση και δυναμική μεταβολή των μεγεθών, ο μαθητής εμπλέκεται σε απειροστικές λογικές, ενώ το ίδιο το λογισμικό εκ σχεδίασής του, μπορεί να συνδέει στενότερα την κλασική Ευκλείδεια με τον Απειροστικό λογισμό. Αυτή η ιδιότητα, κατά τον Στυλιανό Νεγρεπόντη, αποτελεί την εκ των ων ουκ άνευ προϋπόθεση για την επιβίωση της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ως Λυκειακού μαθήματος, με όσα θετικά αυτό συνεπάγεται και στα οποία μάλλον συμφωνεί η πλειονότητα της μαθηματικής κοινότητας.
- Εφαρμογές όπως η διαπραγματευθείσα, αναδεικνύουν και τον επιμελώς αποκρυπτόμενο πειραματικό χαρακτήρα της Γεωμετρίας [9] ο οποίος πάντα υπήρχε από την εποχή του Αρχιμήδη και έχει αποτυπωθεί στην επιστολή του ιδίου προς τον Ερατοσθένη [8]. Στην σύγχρονη εποχή, όπου μέσω των νέων παιδαγωγικών θεωριών (Ανακαλυπτική μάθηση, κονστρουκτιβισμός) η μαθηματική ανακάλυψη έρχεται -όσο είναι δυνατόν- κοντά στον μαθητή , η αξία των δυναμικών υπερ-εργαλείων Γεωμετρίας είναι καταλυτική και δίνει στον μαθητή μια πρώτη μύηση στην έρευνα και την μαθηματική ανακάλυψη, η οποία για να παγιωθεί, περνά μέσα από αμφισβήτηση, εικασίες, διαψεύσεις από αντιπαραδείγματα, ανασκευές, επαναδιατυπώσεις κλπ. όπως είναι το υπόδειγμα της μαθηματικής ανακάλυψης [5].
- Είναι βέβαιον, ότι ο χαρακτήρας των δυναμικών λογισμικών Γεωμετρίας, διαφοροποιείται αρκετά και ως προς το παιδαγωγικό και ως προς το διδακτικό σκέλος από την κρατούσα πραγματικότητα των Λυκείων, η οποία σε συνδυασμό με το γνωστό έωλο επιχείρημα «αφού δεν εξετάζεται γιατί να το διδάξω;» δημιουργούν ένα κλίμα απαξίωσης των ΤΠΕ. Ο υπάρχων προγραμματισμός της Πολιτείας με την ολοκλήρωση της επιμόρφωσης στο Β΄ επίπεδο των καθηγητών [10], φαίνεται να αρχίζει να δρομολογεί την οριστική ρήξη με το παρελθόν της παραδοσιακής διδασκαλίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Balacheff, N. & Kaput, J. (1996) Computer- based Learning Environments in Mathematics. In Bishop, A., Clements, K., Keitel, C, Kilpatrick, J. & Laborde, C. *International Handbook of Mathematics Education*. 469- 501.
2. Τουμάσης Μπ. (1999): *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών*. Εκδ. Gutenberg
3. Davis, P. (1995): "The rise, fall, and possible transfiguration of triangle Geometry". *American Mathematical Monthly*, 102(3), 204 – 214.

4. Glasersfeld, E. (1987). Learning as a constructive activity. In C. Janvier (Eds), *Problems of representation in teaching and learning of mathematics* (pp.3-18). London: Lawrence Erlbaum
5. Laborde, C. (1998). Visual phenomena in the teaching/learning of geometry in a computer-based environment. In C. Mammana, & V. Villani, (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: An ICMI study.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
6. Lakatos, I.(1996). *Αποδείξεις και Ανασκευές - Η λογική της Μαθηματικής ανακάλυψης»,* Εκδόσεις Τροχαλία Αθήνα.
7. Oldknow A. (1995): "Computer aided research into triangle geometry". *The mathematical Gazette,* 79(485), 263-274
8. Vygotsky, L. (1978). *Mind in Society.* Cambridge: Harvard University Press
9. Yeh, A.& Nason, R.(2004). Knowledge building of 3D geometry concepts and processes within a virtual reality learning environment. In *Proceedings of Wort Conference on Educational Multimedia, Hypermedia and Telecommunications* (p 2175-2182). Chesapeake, VA: AACE
10. Αρχιμήδους *«Περί των μηχανικών θεωρημάτων, προς Ερατοσθένην έφοδος»* (3.83.26-3.84.2)
11. Πλατάρος Γιάννης-Παπαδοπούλου Αθηνά (2009) *:«Ο κρυφός πειραματικός χαρακτήρας της Γεωμετρίας και η διδακτική του αξιοποίηση, μέσω των δυναμικών γεωμετρικών λογισμικών»* Πρακτικά 1ου εκπαιδευτικού Συνεδρίου με θέμα «ένταξη και χρήση των ΤΠΕ στην εκπαιδευτική διαδικασία» Βόλος
12. Πρακτικά ημερίδας στις 05/5/2008 για ενημέρωση Επιμορφωτών Β΄ Επιπέδου, Ξενοδοχείο TITANIA, Αθήνα .